

Wyjazd matematyczny
DWUMATEX

Teresin, 17–19 czerwca 2026 r.

Spis treści

1	Rozkład jazdy	3
2	Konkursy i mecze – treści	5
2.1	Grupa młodszą	5
2.2	Grupa starsza	7
3	Wskazówki do zawodów indywidualnych	11
3.1	Grupa młodszą	11
3.2	Grupa starsza	12
4	Rozwiązania zadań	13
4.1	Grupa młodszą	13
4.2	Grupa starsza	25

1 Rozkład jazdy

I dzień (środa)

10:45–13:30 🕒 pierwszy konkurs indywidualny

13:30 🍴 obiad

15:30–17:00 *młodzi* 🗣️ wykład: *armia Conwaya*
starsi 🗣️ omówienie konkursu

17:30–19:00 *młodzi* 🗣️ omówienie konkursu
starsi 🗣️ wykład: *Humpty-Dumpty*

19:00 🍴 kolacja

20:00 🧩 zadania wieczorne

II dzień (czwartek)

8:30 🍳 śniadanie

9:30–12:15 🕒 drugi konkurs indywidualny

12:30–13:30 *młodzi* 🗣️ omówienie zadań wieczornych
starsi 🗣️ omówienie zadań wieczornych

13:30 🍴 obiad

15:30–17:00 *młodzi* 🗣️ wykład: *środki mas*
starsi 🗣️ wykład: *funkcje tworzące*

17:30–19:00 *młodzi* 🗣️ omówienie konkursu
starsi 🗣️ omówienie konkursu

19:00 🍴 kolacja

20:00 ⚽ początek meczu

III dzień (piątek)

8:30 ☕ śniadanie

9:30 👥 rozgrywka meczowa

11:45 🚆 wyjście na pociąg

2 Konkursy i mecze – treści

2.1 Grupa młodszą

Konkurs indywidualny 1

1. Niech n będzie liczbą całkowitą najbliższą liczbie

$$x = \sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}} + \sqrt[3]{3}.$$

Oblicz $\sqrt{9 + 4\sqrt{n}}$.

2. W trapezie $ABCD$ kąty przy wierzchołkach A i D są proste. Ponadto wiadomo, że

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = 15^\circ \quad \text{oraz} \quad BC = 2.$$

Oblicz pole trapezu $ABCD$.

3. Dane są dodatnie liczby x, y . Wykaż, że jeśli liczby xy^2 oraz x^3y^7 są całkowite, to liczby x, y są wymierne.
4. Dane są dwa przystające trójkąty równoboczne ABC oraz DEF położone tak, że bok DE trójkąta DEF przecina boki AB i BC trójkąta ABC odpowiednio w punktach L i M , bok EF przecina boki BC i AC odpowiednio w punktach N i P oraz bok DF przecina boki AC i AB odpowiednio w punktach Q i K . Udowodnij, że

$$KL^2 + MN^2 + PQ^2 = QK^2 + LM^2 + NP^2.$$

5. Na stole znajduje się 2026 ciasteczek. W pojedynczym ruchu gracz może zjeść od 1 do 4 ciasteczek. Wygrywa gracz, który zje ostatnie ciasteczko. Który z dwóch graczy ma strategię wygrywającą?

Konkurs indywidualny 2

6. Liczby x i y spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Wyznacz wzór na $x^5 + y^5$ w zależności od a i b .

7. Punkty A, B i C leżą, w tej kolejności, na linii prostej. Trójkąty ABD i BCE są równoboczne i leżą po tej samej stronie prostej AC . Odcinki AE i BD przecinają się w punkcie F , a odcinki BE i CD przecinają się w punkcie G . Udowodnij, że $FG \parallel AC$.
8. Oblicz resztę z dzielenia liczby $47^{37^{27}}$ przez 11.
9. Dwie prostopadłe cięciwy AB i CD okręgu o promieniu 5 przecinają się w punkcie E . Różnica długości odcinków AE i BE wynosi 2. Oblicz długość cięciwy CD .
10. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają warunek

$$7a = 6b = 5c.$$

Wykaż, że jeśli liczba $a + b + c$ jest pierwsza, to każda z liczb $-a + b + c$, $a - b + c$ oraz $a + b - c$ jest także pierwsza.

Zadania wieczorne

11. Wyznacz pole trójkąta o wysokościach $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$.
12. Oblicz (czyli przedstaw w najprostszej postaci za pomocą n):
- $$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}.$$
13. Udowodnij, że liczba o 1 większa od iloczynu czterech kolejnych liczb całkowitych jest kwadratem liczby całkowitej.
14. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby 13^{101} zapisanej w systemie trójkowym.
15. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek a, b, c liczb naturalnych spełniających warunki:

$$1 < a < b < c \quad \text{oraz} \quad a + b + c \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Mecz matematyczny

16. Dana jest liczba naturalna n o tej własności, że liczby 2^n oraz 5^n zaczynają się tą samą cyfrą w zapisie dziesiętnym. Rozstrzygnij, jaka to cyfra.
17. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Niech K, L, M, N będą odpowiednio środkami odcinków AB, CD, BC i DE . Punkty P i Q są odpowiednio środkami odcinków KL i MN . Wykaż, że $PQ \parallel AE$ i $AE = 4PQ$.
18. Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają równość:

$$a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4.$$

Wykaż, że $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

19. Z klocków 2×1 zbudowano kwadrat o boku 6. Udowodnij, że istnieje prosta równoległa do jednego z boków kwadratu, przecinająca wewnątrz kwadratu i nieprzecinająca wewnątrz żadnego z klocków.

20. W trójkącie ABC miary kątów przy wierzchołkach A i B wynoszą po 40° . Niech L będzie spodkiem dwusiecznej kąta A na bok BC . Wykaż, że $AB = AL + LC$.
21. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość $(a + c)(b + d) = ac + bd$. Wyznacz minimalną wartość wyrażenia

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

22. Tramwaj mogący pomieścić maksymalnie 80 osób wyruszył pusty z zajezdni. Zatrzymywał się na 18 kolejnych przystankach P_1, P_2, \dots, P_{18} i pusty wrócił do zajezdni. Udowodnij, że istnieją takie dwa przystanki P_i oraz P_j , gdzie $1 \leq i < j \leq 18$, że żaden pasażer nie jechał z przystanku P_i do P_j .
23. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = AC$ oraz $\sphericalangle BAC = 80^\circ$. Punkt D leży na boku BC w ten sposób, aby $\sphericalangle CAD = 30^\circ$. Punkt E leży na boku AC w ten sposób, aby $\sphericalangle ABE = 30^\circ$. Znaleźć miarę kąta $\sphericalangle BED$.

24. Rozstrzygnij, czy szachownicę o wymiarach 2026×2026 można przykryć klocekami, z których każdy ma wymiary 5×5 lub 6×6 . Zakładamy, że klocki nie nachodzą na siebie i nie wystają poza szachownicę.
25. Wyznacz wszystkie trójki liczb rzeczywistych a, b, c różnych od 0, dla których zachodzi równość

$$\frac{a-b}{c^7} = \frac{b-c}{a^7} = \frac{c-a}{b^7}.$$

26. Niech d będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą różną od 2, 5 i 13. Wykaż, że można wybrać takie dwa elementy a, b należące do zbioru $\{2, 5, 13, d\}$, że $ab - 1$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

2.2 Grupa starsza

Konkurs indywidualny 1

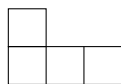
27. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Udowodnij, że

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{9} + 15abc.$$

28. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n o następującej własności: ostatnią cyfrą liczby n jest 6, a po przeniesieniu tej cyfry 6 na początek otrzymamy liczbę $4n$.
29. Cięciwa CD okręgu ω przechodzi przez środek cięciwy AB okręgu ω . Styczne w punktach C i D do okręgu ω przecinają prostą AB w punktach X, Y odpowiednio. Wykaż, że $AX = YB$.
30. Wykaż, że

$$\cos 88^\circ \cdot \cos(2 \cdot 88^\circ) \cdot \cos(2^2 \cdot 88^\circ) \cdot \dots \cdot \cos(2^{23} \cdot 88^\circ) = \frac{1}{2^{24}}.$$

31. Rozstrzygnij, czy szachownicę o wymiarach 4×17 można pokryć tetraminami przedstawionymi na poniższym rysunku (kostki można obracać).



Konkurs indywidualny 2

32. Rozwiąż równanie:

$$x + \frac{2026}{x} = [x] + \frac{2026}{[x]}.$$

33. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC . Udowodnij, że jeśli $[ADE] = [BCED]$, to

$$\frac{AD + AE}{DB + BC + CE} \geq \frac{1}{3}.$$

34. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Liczby całkowite a, b, c, d są takie, że liczby $a + b + c + d$ oraz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dzielą się przez n . Udowodnij, że liczba

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd$$

jest podzielna przez n .

35. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Półproste BS i CS przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach L i N . Odcinek NL przecina prostą AB w punkcie P oraz prostą AC w punkcie Q . Wykazać, że czworokąt $APSQ$ jest rombem.
36. Gra 2-osobowa polega na stawianiu pionków w wierzchołkach n -kąta foremnego (zakładamy, że $n \geq 3$). Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz stawia jeden ze swych, dotychczas nieużytych pionków na dowolnym niezajętym wierzchołku, który nie sąsiaduje z wierzchołkiem zajęтым przez pionek przeciwnika. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Rozstrzygnij, w zależności od n , czy strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik.

Zadania wieczorne

37. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle ACB = 4 \cdot \sphericalangle BAC$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}.$$

38. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s i s' . Trzy różne punkty A, B i C leżą na okręgu o . Punkt P leży na sferze s , na zewnątrz sfery s' . Prosta PA przecina sferę s' w punkcie $A' \neq A$; analogicznie określamy punkty B' i C' . Wykaż, że płaszczyzna π , przechodząca przez punkt P i styczna do sfery s , jest równoległa do płaszczyzny $A'B'C'$.

39. Dziewięciocyfrową liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *przyjemną*, jeśli zawiera w swoim zapisie dziesiętnym każdą cyfrę od 1 do 9. Liczbę nazwiemy *cudowną*, jeśli jest przyjemna i dla każdego $k = 1, \dots, 9$ jej k -ta cyfra jest równa pozycji cyfry k w tej liczbie. Na przykład liczba 847296315 jest cudowna:

- pierwsza jej cyfra to 8, co jest także pozycją cyfry 1 w tej liczbie;
- druga jej cyfra to 4, co jest także pozycją cyfry 2 w tej liczbie;
- trzecia jej cyfra to 7, co jest także pozycją cyfry 3 w tej liczbie;
- itd.

Udowodnij, że liczb cudownych jest parzyście wiele.

40. Danych jest kilka dodatnich liczb: x_1, \dots, x_n . Suma iloczynów $x_i \cdot x_j$ dla $i < j$ wynosi 1. Udowodnij, że można wykreślić jedną liczbę tak, że suma pozostałych liczb jest mniejsza niż $\sqrt{2}$.

41. Wielomian $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ o współczynnikach rzeczywistych spełnia warunki $P(1) = 0$ oraz $P(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$a_n + 2a_{n-1} + \dots + na_1 + (n+1)a_0 = 0.$$

Mecz matematyczny

42. Znajdź największą liczbę rzeczywistą k o następującej własności: dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c takich, że

$$a \leq b \leq c, \quad ab + bc + ca = 0 \quad \text{oraz} \quad abc = 1$$

ma miejsce nierówność

$$|a + b| \geq k \cdot |c|.$$

43. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n równanie:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1x_2 \dots x_n} = 1$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych x_1, x_2, \dots, x_n .

44. Niech w będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, że $n \mid w(2^n)$ dla wszystkich $n \geq 1$. Wykaż, że w jest wielomianem zerowym.

45. Każdy bok ośmiokąta foremnego jest pomalowany na niebiesko lub żółto. Określamy nowe pokolorowanie w następujący sposób: każdy bok taki, że oba sąsiadujące z nim boki były różnych kolorów, otrzymuje kolor niebieski; każdy bok taki, że oba sąsiadujące z nim boki były jednakowego koloru, otrzymuje kolor żółty (zmiana kolorów jest wykonywana jednocześnie). Wykaż, że wychodząc z dowolnego pokolorowania dostaniemy w skończonej liczbie kroków (tzn. opisanych wyżej zmian kolorów) ośmiokąt, którego wszystkie boki są żółte. Jaka jest maksymalna liczba kroków, która może być do tego niezbędna?

46. Wykaż, że w czworokącie wypukłym o polu 1 suma długości przekątnych i długości boków jest większa lub równa $4 + 2\sqrt{2}$.
47. Udowodnij, że istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych takich, że każda ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60.
48. Niech $a, b, c, d > 0$ spełniają $a + b + c + d = 1$. Wykaż nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

49. Na bokach AB i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q , że $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie X . Punkt Y jest symetryczny do punktu X względem środka boku BC . Udowodnij, że punkt Y leży na dwusiecznej kąta BAC .
50. Na konferencję matematyczną przyjechało 17 osób, przy czym każda z osób zna dokładnie cztery inne osoby. Wykazać, że istnieją dwie nieznanne sobie osoby, które nie mają wspólnego znajomego.
51. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Punkt T spełnia warunek

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC = \sphericalangle ATC.$$

Okrąg opisany na trójkącie BCT przecina proste AB i AC po raz drugi odpowiednio w punktach K i L . Udowodnij, że punkty K i L są równoodległe od prostej AT .

52. Dwie wiewiórki postanowiły zbierać orzechy na zimę. W dniu rozpoczęcia gromadzenia zapasów, które nazwały zgodnie *dniem zero*, miały zupełnie pustą spiżarnię. Pierwszego dnia udało im się znaleźć 2 orzechy. Od następnego dnia z zadziwiającą regularnością codziennie znajdowały 2 razy tyle orzechów, ile miały w swej spiżarni dwa dni wcześniej. Ponadto każdego dnia (od drugiego) w cudowny sposób pojawiały się w spiżarni dodatkowe 4 orzechy (od drugiego)... Ułóż równanie rekurencyjne opisujące liczbę orzechów, które wiewiórki posiadają n -tego dnia oraz rozwiąż je dowolną metodą.

3 Wskazówki do zawodów indywidualnych

3.1 Grupa młodsza

Konkurs indywidualny 1

1. *Wskazówka.* Usuń niewymierność z mianownika za pomocą wzoru skróconego mnożenia.
2. *Wskazówka.* Zauważ, że $BC = CD$.
3. *Wskazówka.* Skoro liczba xy^2 jest całkowita, to całkowita jest również jej trzecia potęga:
 $(xy^2)^3 = x^3y^6$.
4. *Wskazówka.* Znajdź na rysunku (bez dorysowywania niczego oprócz punktów i odcinków występujących w treści) wszystkie możliwe pary trójkątów podobnych. Co wiemy o stosunku pól trójkątów podobnych?
5. *Wskazówka.* Zaczynij od końca. Sprawdź, które liczby ciasteczek dają pozycje wygrywające. Pomocna może być rozgrywka z mają liczbą ciasteczek.

Konkurs indywidualny 2

6. *Wskazówka.* Użyj wzoru na $x^n + y^n$ dla nieparzystego n . Jeśli go nie pamiętasz, spróbuj wykombinować rozkład na czynniki $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (\dots)$, a następnie analogicznie dla $x^5 + y^5$.
7. *Wskazówka.* Udowodnij przystawanie trójkątów BCG i BEF .
8. *Wskazówka.* Zaczynij od zbadania reszty kolejnych potęg liczby 47 modulo 11. Zauważ odpowiednią regułę i rozstrzygnij, jak się w nią wpisuje wykładnik 37^{27} .
9. *Wskazówka.* Spróbuj udowodnić, że środek danego okręgu jest odległy od cięciwy CD o 1.
10. *Wskazówka.* Wykaż, że $a = 30A$, $b = 35A$, $c = 42A$.

3.2 Grupa starsza

Konkurs indywidualny 1

27. *Wskazówka.* Zastosuj nierówność między średnimi.
28. *Wskazówka.* Oznacz $n = 10a + 6$, gdzie liczba a jest k -cyfrowa. Ułóż równanie wyrażające własność z treści zadania i wyprowadź wzór na n . Pozostaje znaleźć wszystkie możliwe przypadki, kiedy otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną. **Albo innym sposobem:** spróbuj wykombinować, jak mogłoby wyglądać takie pisemne mnożenie: w pierwszej linijce trochę pustych (na razie) krater i na końcu 6 (no bo początkowa liczba kończy się cyfrą 6), w drugiej linijce tylko cyfra 4 zapisana bezpośrednio pod cyfrą 6 (bo mnożymy daną liczbę przez 4), pod tym wszystkim pozioma kreska (jak to w dzieleniu pisemnym), no a pod poziomą kreską – jak wiadomo – ma się znaleźć wynik mnożenia. Czy da się tu wykombinować – jak w jakiejś łamigłówce (bo czyż zadanka z matematyki nie są jak łamigłówki?) w jakiej kolejności i jakie cyfry należy uzupełniać, aż wreszcie wywnioskować całe rozwiązanie?
29. *Wskazówka.* Spróbuj udowodnić, korzystając z własności pól trójkątów podobnych, że

$$\frac{AX}{XB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2.$$

30. *Wskazówka.* Pomnóż obie strony równania przez $\sin(88^\circ)$.
31. *Wskazówka.* Pokoloruj pierwszy i trzeci wiersz szachownicy na biało, zaś drugi i czwarty – na czarno.

Konkurs indywidualny 2

32. *Wskazówka.* Przenieś wszystko na jedną stronę i przekształć do postaci iloczynu pewnych wyrażeń. Pamiętaj, że liczby x i $\lfloor x \rfloor$ nie mogą się różnić o zbyt wiele.
33. *Wskazówka.* Wyeliminuj z tezy odcinek BC za pomocą nierówności trójkąta. Jeśli chodzi o AD oraz AE , użyj wzoru z sinusem na pole trójkąta.
34. *Wskazówka.* Rozważ wielomian

$$W(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s$$

i skorzystaj ze wzorów Viete'a.

35. *Wskazówka.* Zastosuj **twierdzenie o trójliściu** (Jeśli I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a D środkiem łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC niezawierającego punktu B , to $ID = AD = CD$).
36. *Wskazówka.* Zaczynaj od przypadku parzystego. Jaką strategię można zastosować niemal zawsze w grze 2-osobowej, nawet jeśli się nie umie grać?

4 Rozwiązania zadań

4.1 Grupa młodsza

Konkurs indywidualny 1

1. Niech n będzie liczbą całkowitą najbliższą liczbie

$$x = \sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} + \sqrt[3]{3}}.$$

Oblicz $\sqrt{9 + 4\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów mamy:

$$x = \sqrt{\frac{2(\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} + 1)}{3-1} + \sqrt[3]{3}} = \sqrt{\sqrt[3]{3}^3 + 2\sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt[3]{3} + 1)^2} = \sqrt[3]{3} + 1 \in (2; 2,5).$$

Zatem $n = 2$. Wtedy

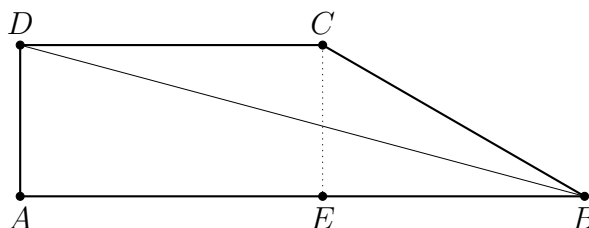
$$\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} = \boxed{2\sqrt{2} + 1}.$$

2. W trapezie $ABCD$ kąty przy wierzchołkach A i D są proste. Ponadto wiadomo, że

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = 15^\circ \quad \text{oraz} \quad BC = 2.$$

Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Rozwiązanie:



Z kątów naprzemianległych mamy

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD = 15^\circ.$$

Zatem trójkąt BCD jest równoramienny, czyli $CD = BC = 2$. Trójkąt BCE jest trójkątem $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$, więc $CE = 1$, $BE = \sqrt{3}$. Stąd

$$[ABCD] = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3} + 2) \cdot 1 = \boxed{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

3. Dane są dodatnie liczby x, y . Wykaż, że jeśli liczby xy^2 oraz x^3y^7 są całkowite, to liczby x, y są wymierne.

Rozwiązanie:

Skoro $x, y > 0$, to $xy^2 \neq 0$. Zatem

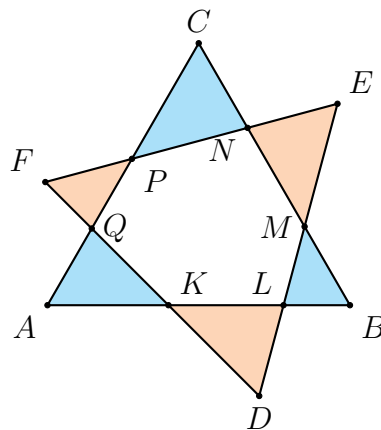
$$y = \frac{x^3y^7}{x^3y^6} = \frac{x^3y^7}{(xy^2)^3} \in \mathbb{Q}.$$

Dalej $x = \frac{xy^2}{y^2} \in \mathbb{Q}$.

4. Dane są dwa przystające trójkąty równoboczne ABC oraz DEF położone tak, że bok DE trójkąta DEF przecina boki AB i BC trójkąta ABC odpowiednio w punktach L i M , bok EF przecina boki BC i AC odpowiednio w punktach N i P oraz bok DF przecina boki AC i AB odpowiednio w punktach Q i K . Udowodnij, że

$$KL^2 + MN^2 + PQ^2 = QK^2 + LM^2 + NP^2.$$

Rozwiązanie:



Na mocy rachunku kątów, wszystkie trójkąty są podobne (kąty wierzchołkowe, kąt 60°). Ponadto, suma pól trójkątów niebieskich jest taka sama jak suma pól trójkątów pomarańczowych

(odejmujemy od pól dużych trójkątów pole sześciokąta). Wobec tego:

$$\begin{aligned} [AKQ] + [BLM] + [CNP] &= [DKL] + [EMN] + [FPQ], \\ \frac{[AKQ]}{[DKL]} + \frac{[BLM]}{[DKL]} + \frac{[CNP]}{[DKL]} &= 1 + \frac{[EMN]}{[DKL]} + \frac{[FPQ]}{[DKL]}, \\ \frac{QK^2}{KL^2} + \frac{LM^2}{KL^2} + \frac{NP^2}{KL^2} &= 1 + \frac{MN^2}{KL^2} + \frac{PQ^2}{KL^2} \\ QK^2 + LM^2 + NP^2 &= KL^2 + MN^2 + PQ^2 \end{aligned}$$

5. Na stole znajduje się 2026 ciasteczek. W pojedynczym ruchu gracz może zjeść od 1 do 4 ciasteczek. Wygrywa gracz, który zje ostatnie ciasteczko. Który z dwóch graczy ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie:

Niech a_i będzie liczbą ciastek zjedzoną przez drugiego gracza w i -tym ruchu. Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą. Wystarczy, że w pierwszym ruchu zje jedno ciastko, a w i -tym ruchu zje $5 - a_{i-1}$. W ten sposób zje ostatnie ciastko, gdyż po ruchu gracza pierwszego, liczba ciastek jest podzielna przez 5.

Konkurs indywidualny 2

6. Liczby x i y spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Wyznacz wzór na $x^5 + y^5$ w zależności od a i b .

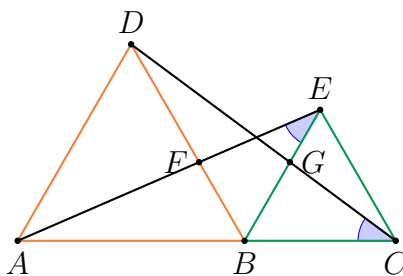
Rozwiązanie:

Z pierwszego równania $a^2 = x^2 + 2xy + y^2 = b + 2xy$, zatem $xy = \frac{a^2 - b}{2}$. Stąd

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \\ &= (x + y)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^3y - x^2y^2 - xy^3) \\ &= (x + y)[(x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 + xy + y^2)] \\ &= (x + y)[(x^2 + y^2)^2 - xy((x + y)^2 - xy)] \\ &= a \cdot \left[b^2 - \frac{a^2 - b}{2} \cdot \left(a^2 - \frac{a^2 - b}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

7. Punkty A, B i C leżą, w tej kolejności, na linii prostej. Trójkąty ABD i BCE są równoboczne i leżą po tej samej stronie prostej AC . Odcinki AE i BD przecinają się w punkcie F , a odcinki BE i CD przecinają się w punkcie G . Udowodnij, że $FG \parallel AC$.

Rozwiązanie:



Zauważmy, że $\triangle ABE \equiv \triangle DBC$ na mocy cechy (bkb), gdyż $AB = BD$, $BE = BC$ oraz $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBC = 120^\circ$. Z przystawania dostajemy równość kątów: $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BCD$. Następnie mamy przystawanie $\triangle BCG \equiv \triangle BEF$ na mocy cechy (kbk), gdyż $\sphericalangle CBG = \sphericalangle EBF = 60^\circ$, $BC = BE$, $\sphericalangle BCG = \sphericalangle BEF$. Wynika stąd, że $BG = BF$, więc trójkąt BFG jest równoboczny i $\sphericalangle BGF = \sphericalangle GBC = 60^\circ$, co daje $AC \parallel FG$.

8. Oblicz resztę z dzielenia liczby $47^{37^{27}}$ przez 11.

Rozwiązanie:

Mamy $47 \equiv 3 \pmod{11}$ oraz $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$. Szukamy więc 37^{27} modulo 5. Mamy $37 \equiv 2 \pmod{5}$. Łatwo zobaczyć, że $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$. Zatem

$$37^{27} \equiv 2^{27} \equiv 2^{4 \cdot 8 + 3} \equiv (2^4)^8 \cdot 2^3 \equiv 1^8 \cdot 8 \equiv 3 \pmod{5}.$$

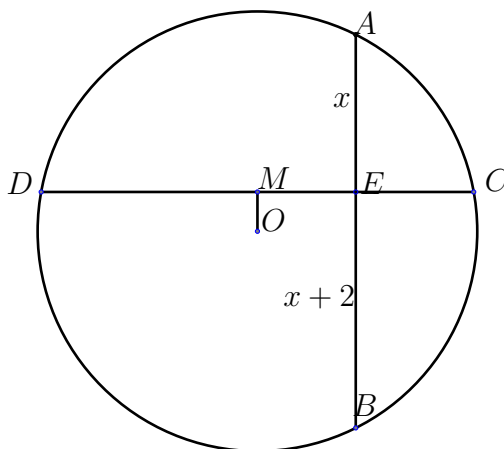
Stąd $37^{27} = 3 + 5k$ dla pewnej liczby naturalnej k . Stąd

$$47^{37^{27}} \equiv 3^{3+5k} \equiv (3^5)^k \cdot 3^3 \equiv 1^k \cdot 5 \equiv 5 \pmod{11}.$$

9. Dwie prostopadłe cięciwy AB i CD okręgu o promieniu 5 przecinają się w punkcie E . Różnica długości odcinków AE i BE wynosi 2. Oblicz długość cięciwy CD .

Rozwiązanie:

Niech O będzie środkiem okręgu. Leży on na symetralnej cięciwy AB , zatem $BE - OM = AE + OM$. Stąd $2 \cdot OM = BE - AE = x + 2 - x = 2$, czyli $OM = 1$.



Wobec tego $CD = 2DM = 2\sqrt{DO^2 - OM^2} = 2\sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{24} = \boxed{4\sqrt{6}}$.

10. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają warunek

$$7a = 6b = 5c.$$

Wykaż, że jeśli liczba $a + b + c$ jest pierwsza, to każda z liczb $-a + b + c$, $a - b + c$ oraz $a + b - c$ jest także pierwsza.

Rozwiązanie:

Z równości $7a = 6b$ oraz $7a = 5c$ wynika, że $5 \mid a$ oraz $6 \mid a$, gdyż $\text{NWD}(5, 7) = 1$ oraz $\text{NWD}(6, 7) = 1$. Stąd $30 \mid a$. Zatem $a = 30k$ dla pewnej liczby naturalnej k . Dalej wyliczamy: $b = 35k, c = 42k$. Mamy dalej

$$a + b + c = 30k + 35k + 42k = 107k$$

i jest to liczba pierwsza tylko dla $k = 1$. Dalej mamy:

- $-a + b + c = -30k + 35k + 42k = 47k = 47$ – liczba pierwsza;
- $a - b + c = 30k - 35k + 42k = 37k = 37$ – liczba pierwsza;
- $a + b - c = 30k + 35k - 42k = 23k = 23$ – liczba pierwsza.

Zadania wieczorne

11. Wyznacz pole trójkąta o wysokościach $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$.

Rozwiązanie:

Niech a, b, c będą bokami trójkąta oraz P będzie polem tego trójkąta. Wtedy $a = 3P, b = 5P, c = 7P$. Ze wzoru Herona mamy

$$P = \sqrt{\frac{15P}{2} \cdot \frac{9P}{2} \cdot \frac{5P}{2} \cdot \frac{P}{2}}$$

$$P = \frac{15P^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{4\sqrt{3}}{45}$$

12. Oblicz (czyli przedstaw w najprostszej postaci za pomocą n):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej k mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \dots + \frac{k-1}{k} + \frac{k}{k} + \frac{k-1}{k} + \dots + \frac{2}{k} + \frac{1}{k} &= \\ = \frac{(1+k-1) + (2+k-2) + \dots + (k-1+1) + k}{k} &= \frac{k \cdot k}{k} = k. \end{aligned}$$

Zatem suma z zadania upraszcza się do:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

13. Udowodnij, że liczba o 1 większa od iloczynu czterech kolejnych liczb całkowitych jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Niech $x - \frac{3}{2}, x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}, x + \frac{3}{2}$ będą czterema kolejnymi liczbami całkowitymi. Wtedy

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) + 1 &= \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) + 1 = \\ &= x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{16} = \left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Skoro $x - \frac{1}{2} = n \in \mathbb{N}$, więc $x = \frac{1}{2} + n$, a dalej $x^2 = \frac{1}{4} + n + n^2$. Zatem

$$x^2 - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} + n + n^2 - \frac{5}{4} = n^2 + n - 1 \in \mathbb{N}.$$

14. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby 13^{101} zapisanej w systemie trójkowym.

Rozwiązanie:

Dwie ostatnie cyfry w systemie trójkowym to reszta z dzielenia przez 9. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 13 &\equiv 4 \pmod{9} \\ 13^3 &\equiv 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{9} \\ 13^{101} &\equiv (4^3)^{33} \cdot 4^2 \equiv 16 \equiv 7 \pmod{9} \end{aligned}$$

A ponieważ $7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$, szukane ostatnie dwie cyfry w systemie trójkowym to 21.

15. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek a, b, c liczb naturalnych spełniających warunki:

$$1 < a < b < c \quad \text{oraz} \quad a + b + c \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Rozwiązanie:

Wybermy takie liczby naturalne a, b, c , że $1 < a < b < c$, a dodatkowo $b^2 = ac$ (oczywiście jest nieskończenie wiele takich trójek). Wtedy:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = \frac{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}{a + b + c} = (a + b + c) - 2 \cdot \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}.$$

Po to właśnie było założenie $b^2 = ac$, aby $ab + bc + ca = ab + bc + bb = b(a + b + c)$, zatem ostatni ułamek jest liczbą całkowitą, co kończy dowód.

Mecz matematyczny

16. Dana jest liczba naturalna n o tej własności, że liczby 2^n oraz 5^n zaczynają się tą samą cyfrą w zapisie dziesiętnym. Rozstrzygnij, jaka to cyfra.

Rozwiązanie:

Założmy, że d jest wspólną pierwszą cyfrą liczb 2^n i 5^n , czyli:

$$\underbrace{d0\dots0}_{k \text{ cyfr}} \leq 2^n \leq \underbrace{d9\dots9}_{k \text{ cyfr}} \quad \text{oraz} \quad \underbrace{d0\dots0}_{l \text{ cyfr}} \leq 5^n \leq \underbrace{d9\dots9}_{l \text{ cyfr}}.$$

Dla każdego $d = 1, \dots, 9$ wyznaczmy przedział, do którego należy iloczyn $2^n \cdot 5^n$:

Wspólna pierwsza cyfra d	Przedział dla $2^n \cdot 5^n$
1	$(1, 4) \cdot 10^{k+l}$
2	$[4, 9) \cdot 10^{k+l}$
3	$[9, 16) \cdot 10^{k+l}$
4	$[16, 25) \cdot 10^{k+l}$
5	$[25, 36) \cdot 10^{k+l}$
6	$[36, 49) \cdot 10^{k+l}$
7	$[49, 64) \cdot 10^{k+l}$
8	$[64, 81) \cdot 10^{k+l}$
9	$[81, 100) \cdot 10^{k+l}$

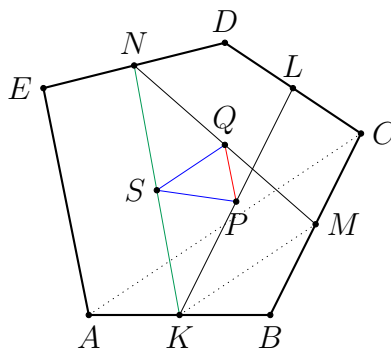
UWAGA: w przypadku $d = 1$ obie nierówności są ostre (czyli przedział otwarty), ponieważ $n \geq 1$, zatem 2^n i 5^n w zapisie dziesiętnym nie składają się z jedynek i samych zer.

A ponieważ $2^n \cdot 5^n = 10^n = \underbrace{10\dots0}_{n \text{ zer}}$, to jedyną możliwą pierwszą cyfrą jest $d = 3$, która występuje na przykład dla $n = 5$ (bo $2^5 = 32$ oraz $5^5 = 3125$).

17. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Niech K, L, M, N będą odpowiednio środkami odcinków AB, CD, BC i DE . Punkty P i Q są odpowiednio środkami odcinków KL i MN . Wykaż, że $PQ \parallel AE$ i $AE = 4PQ$.

Rozwiązanie:

Sposób I: Niech S będzie środkiem odcinka NK .



Wtedy z linii środkowej mamy:

$$QS = \frac{1}{2}KM = \frac{1}{4}AC \quad \text{oraz} \quad QS \parallel KM \parallel AC,$$

$$PS = \frac{1}{2}LN = \frac{1}{4}EC \quad \text{oraz} \quad PS \parallel LN \parallel EC.$$

Z powyższych równości mamy, że $\triangle QPS \sim \triangle ACE$ w skali $\frac{1}{4}$, więc $PQ \parallel AE$ oraz $AE = 4PQ$.

Sposób II, wektorowo:

$$\vec{PQ} = \vec{PK} + \vec{KB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DN} + \vec{NQ},$$

$$\vec{PQ} = \vec{PK} + \vec{KB} + \vec{BM} + \vec{MQ},$$

$$\vec{PQ} = \vec{PL} + \vec{LD} + \vec{DN} + \vec{NQ},$$

$$\vec{PQ} = \vec{PL} + \vec{LC} + \vec{CM} + \vec{MQ}.$$

Dodajemy stronami i mamy

$$4\vec{PQ} = 2\vec{KB} + \vec{BC} + \vec{CD} + 2\vec{DM} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE},$$

a stąd natychmiast wynika teza.

18. Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają równość:

$$a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4.$$

Wykaż, że $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie:

$$a^3 + 4a^2b + 4ab^2 = 4a^2 + 4ab^2 + b^4$$

$$a(a + 2b)^2 = (2a + b^2)^2$$

$$a = \left(\frac{2a + b^2}{a + 2b} \right)^2$$

Zatem a jest kwadratem liczby wymiernej. Dalej:

$$\sqrt{a} - 1 = \frac{2a + b^2}{a + 2b} - 1 = \frac{a - 2b + b^2}{a + 2b}$$

$$a(\sqrt{a} - 1) + 2\sqrt{ab} - 2b = a - 2b + b^2$$

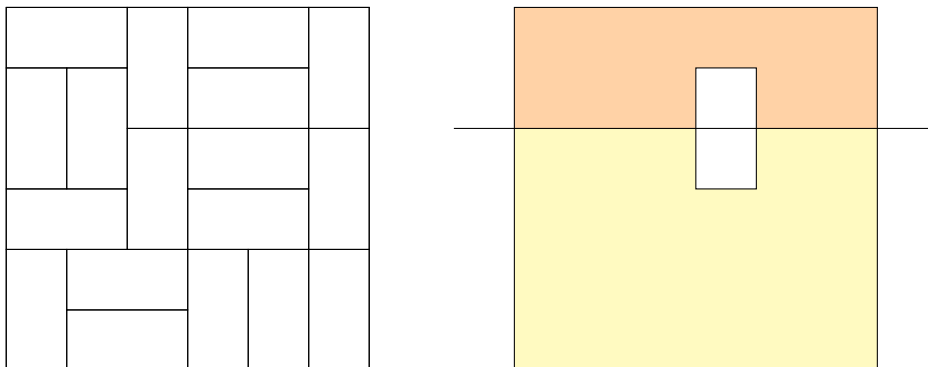
$$a(\sqrt{a} - 1) = (\sqrt{a} - b)^2$$

$$\sqrt{a} - 1 = \left(\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a}} \right)^2$$

19. Z klocków 2×1 zbudowano kwadrat o boku 6. Udowodnij, że istnieje prosta równoległa do jednego z boków kwadratu, przecinająca wewnątrz kwadratu i nieprzecinająca wnętrza żadnego z klocków.

Rozwiązanie:

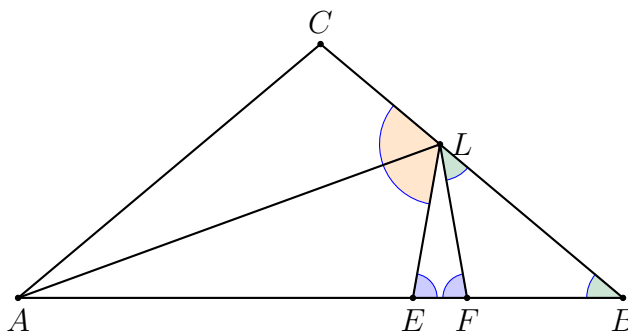
Możliwych linii cięć jest 10 – po 5 pionowych i poziomych.



Kłosek może być przecięty dokładnie jedną z tych 10 prostych. Ponadto, jeśli któraś z tych prostych przecina jeden klocek, to musi też przeciąć drugi. Rzeczywiście, obszar pomarańczowy i żółty mają nieparzystą liczbę pól, więc nie da się zappełnić klockami 2×1 . Na całej planszy jest 18 klocków, więc mamy 9 par. Mamy 10 prostych, a tylko 9 par, więc istnieje chociaż jedna prosta, która nie przecina żadnej pary klocków.

20. W trójkącie ABC miary kątów przy wierzchołkach A i B wynoszą po 40° . Niech L będzie spodkiem dwusiecznej kąta A na bok BC . Wykaż, że $AB = AL + LC$.

Rozwiązanie:



Niech punkt E będzie odbiciem symetrycznym punktu C względem dwusiecznej AL . Wtedy $\triangle AEL \equiv \triangle ACL$. Stąd $AE = AC$, $CL = LE$ oraz $\sphericalangle AEL = \sphericalangle ACL = 100^\circ$. Zatem $\sphericalangle LEB = 80^\circ$. Niech F będzie takim punktem na boku AB , że $\sphericalangle LFE = 80^\circ$. Wtedy $LE = LF$ oraz $\sphericalangle LFB = 100^\circ$. Z kątów w trójkącie FLB obliczamy, że $\sphericalangle FLB = 40^\circ$, więc trójkąt FLB jest równoramienny. Podsumowując, $CL = LE = LF = FB$. Obliczając kąty w trójkącie AFL , otrzymujemy, że $\sphericalangle ALF = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ$, więc trójkąt AFL jest równoramienny: $AL = AF$. Zatem

$$AL + LC = AF + FB = AB.$$

21. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość $(a + c)(b + d) = ac + bd$. Wyznacz minimalną wartość wyrażenia

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnimi (arytmetyczną i geometryczną) dla dwóch wyrazów mamy:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} + 2\sqrt{\frac{bd}{ac}} = \frac{2(ac + bd)}{\sqrt{abcd}} = \frac{2(a + c)(b + d)}{\sqrt{abcd}} \geq \frac{2 \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bd}}{\sqrt{abcd}} = 8$$

Równość zachodzi dla $a = c, b = d, a^2 + b^2 = 4ab$, czyli $a = b \cdot (2 + \sqrt{3})$.

22. Tramwaj mogący pomieścić maksymalnie 80 osób wyruszył pusty z zajezdni. Zatrzymał się na 18 kolejnych przystankach P_1, P_2, \dots, P_{18} . Udowodnij, że istnieją takie dwa przystanki P_i oraz P_j , gdzie $i < j$, że żaden pasażer nie jechał z przystanku P_i do P_j .

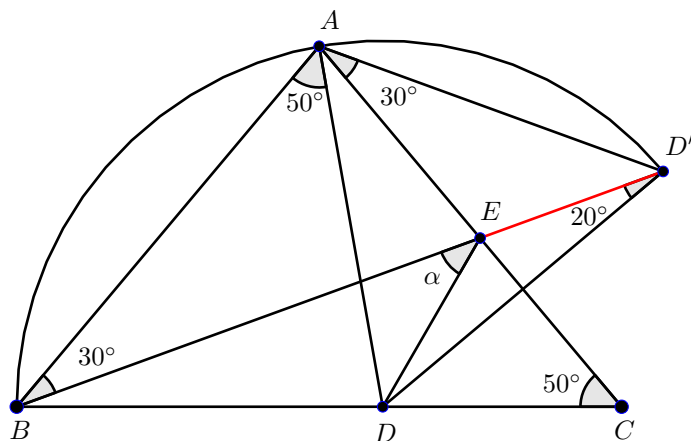
Rozwiązanie:

Naiech A oznacza zbiór pasażerów, którzy wsiadli najdalej na przystanku P_9 , a wysiedli najwcześniej na przystanku P_{10} . Każdy pasażer z A wsiadł na jednym z 9 przystanków: P_1, P_2, \dots, P_9 i wysiadł na jednym z 9 przystanków $P_{10}, P_{11}, \dots, P_{18}$. Wszystkich możliwości, czyli par (P_k, P_l) , gdzie P_k przystanek, na którym pasażer ze zbioru A wsiadł, P_l – wysiadł, jest $9 \cdot 9 = 81$. Każdy pasażer z A jest w pociągu między przystankami P_9 a P_{10} , więc nie może być ich więcej niż 80. Oznacza to, że istnieje taka para (P_i, P_j) , gdzie $i \leq 9 < j$, że żaden pasażer nie jechał między nimi.

23. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = AC$ oraz $\sphericalangle BAC = 80^\circ$. Punkt D leży na boku BC w ten sposób, aby $\sphericalangle CAD = 30^\circ$. Punkt E leży na boku AC w ten sposób, aby $\sphericalangle ABE = 30^\circ$. Znaleźć miarę kąta $\sphericalangle BED$.

Rozwiązanie:

Odbijmy punkt D symetrycznie względem prostej AC , aby otrzymać trójkąt równoboczny ADD' . Wówczas D jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty B, A, D' . Kąt $\sphericalangle D'DA = 60^\circ$ jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany $\sphericalangle D'BA$, który wobec tego ma miarę 30° , czyli taką samą, jak kąt $\sphericalangle EBA$. To oznacza, że punkty B, E, D' są współliniowe. Ponadto prosta AE jest osią symetrii trójkąta ADD' i zarazem symetralną odcinka DD' , czyli trójkąt EDD' jest równoramienny i kąty $\sphericalangle EDD'$ oraz $\sphericalangle ED'D$ są równe. A ponieważ $BD = DD'$, to $\sphericalangle DD'B = \sphericalangle D'BD = 20^\circ$, zatem także $\sphericalangle EDD' = 20^\circ$. Stąd $\alpha = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$ jako kąt zewnętrzny trójkąta EDD' .



24. Rozstrzygnij, czy szachownicę o wymiarach 2026×2026 można przykryć klockami, z których każdy ma wymiary 5×5 lub 6×6 . Zakładamy, że klocki nie nachodzą na siebie i nie wystają poza szachownicę.

Rozwiązanie:

Pierwsze trzy kolumny kolorujemy na biało, następne dwie na czarno itd. Wtedy liczba białych pól na szachownicy jest niepodzielna przez 3 – sprzeczność z istnieniem pokrycia danymi klockami.

25. Wyznacz wszystkie trójki liczb rzeczywistych a, b, c różnych od 0, dla których zachodzi równość

$$\frac{a-b}{c^7} = \frac{b-c}{a^7} = \frac{c-a}{b^7}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy wspólną wartość wyrażeń przez k , tzn.

$$\frac{a-b}{c^7} = \frac{b-c}{a^7} = \frac{c-a}{b^7} = k.$$

Stąd otrzymujemy układ:

$$a-b = kc^7, \quad b-c = ka^7, \quad c-a = kb^7.$$

Dodając stronami, dostajemy:

$$(a-b) + (b-c) + (c-a) = k(a^7 + b^7 + c^7),$$

czyli

$$0 = k(a^7 + b^7 + c^7).$$

Zatem zachodzi co najmniej jeden z warunków:

$$k = 0 \quad \text{lub} \quad a^7 + b^7 + c^7 = 0.$$

Przypadek 1: $k = 0$.

Wtedy:

$$a - b = b - c = c - a = 0,$$

co daje $a = b = c$. Podstawiając do wyjściowej równości, otrzymujemy $0 = 0$, więc każda trójka postaci

$$(t, t, t), \quad t \neq 0$$

jest rozwiązaniem.

Przypadek 2: $a^7 + b^7 + c^7 = 0$.

Z równania

$$\frac{a - b}{c^7} = \frac{b - c}{a^7}$$

otrzymujemy:

$$a^8 - ba^7 = bc^7 - c^8$$

$$a^8 + c^8 = b(a^7 + c^7)$$

$$a^8 + c^8 = b(-b^7)$$

$$a^8 + b^8 + c^8 = 0$$

To równanie spełniają tylko liczby $a = b = c = 0$, które nie spełniają jednak warunków zadania, zatem w tym przypadku nie ma żadnych roz

Wniosek:

Wszystkie trójki liczb rzeczywistych niezerowych spełniają warunek to:

$$(a, b, c) = (t, t, t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

26. Niech d będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą różną od 2, 5 i 13. Wykaż, że można wybrać takie dwa elementy a, b należące do zbioru $\{2, 5, 13, d\}$, że $ab - 1$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wystarczy pokazać, że co najmniej jedna z liczb $2d - 1, 5d - 1, 13d - 1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej. Przypuśćmy, że wszystkie te trzy liczby są kwadratami, a więc istnieją takie liczby naturalne x, y, z , że

$$2d = x^2 + 1, \quad 5d = y^2 + 1, \quad 13d = z^2 + 1.$$

Z pierwszej równości dostajemy, że x musi być liczbą nieparzystą: $x = 2t + 1$. Dalej $d = \frac{1}{2}(x^2 + 1) = 2t^2 + 2t + 1$ jest liczbą nieparzystą. Stąd y, z są parzyste: $y = 2u, z = 2w$. Z równości $z^2 - y^2 = 8d$ otrzymujemy $(w - u)(w + u) = 2d$. Jest to sprzeczność, gdyż lewa strona jest albo nieparzysta albo podzielna przez 4.

Rozwiązanie:

Sposób I, elementarnie: Z podobieństwa trójkątów $\triangle XCA \sim \triangle XBC$ mamy:

$$\frac{AX}{XC} = \frac{XC}{XB} \Leftrightarrow \frac{AX}{XB} = \left(\frac{XC}{XB}\right)^2.$$

Dalej z tego samego podobieństwa mamy:

$$\frac{AC}{XC} = \frac{BC}{XB}.$$

Łącząc powyższe otrzymujemy: $\frac{AX}{XB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$. Analogicznie dostajemy, że $\frac{BY}{YA} = \left(\frac{BD}{DA}\right)^2$. Niech M będzie środkiem odcinka AB . Z podobieństwa trójkątów $\triangle ACM \sim \triangle DBM$ oraz $\triangle ADM \sim \triangle CBM$ mamy

$$\frac{AC}{CM} = \frac{BD}{BM} \quad \text{oraz} \quad \frac{CM}{BC} = \frac{AM}{AD}.$$

Po wymnożeniu stronami powyższych równości otrzymujemy:

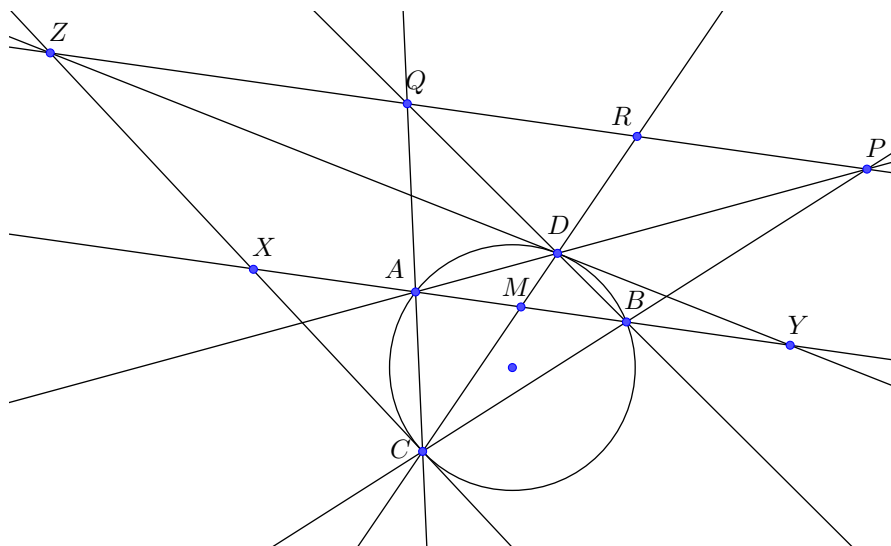
$$\frac{AC}{BC} = \frac{BD}{AD}.$$

Zatem

$$\frac{AX}{XB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = \left(\frac{BD}{DA}\right)^2 = \frac{BY}{YA},$$

a stąd wynika teza.

Sposób II, rzutowo: Niech M będzie środkiem odcinka AB ($M \in CD$) oraz $P = AD \cap BC$, $Q = BD \cap AC$ i $R = CD \cap PQ$. Oznaczmy punkt przecięcia stycznych w C i w D do okręgu ω jako Z .



Z twierdzenia o czworokącie zupełnym wynika, że czwórka $(A, B, M, PQ \cap AB)$ jest harmoniczna, a ponieważ M jest środkiem AB , to $PQ \parallel AB$. Z twierdzenia Pascala dla zdegenerowanego sześciokąta $ACCBDD$ wynika, że punkty Z, Q, P są współliniowe. Rzut z punktu Q czwórki harmonicznej (A, B, M, ∞) na prostą CD pokazuje, że harmoniczna jest także czwórka (C, D, M, R) . Z kolei rzut z punktu Z czwórki harmonicznej (C, D, M, R) na prostą AB pokazuje, że M jest środkiem XY , co kończy dowód.

30. Wykaż, że

$$\cos 88^\circ \cdot \cos (2 \cdot 88^\circ) \cdot \cos(2^2 \cdot 88^\circ) \cdot \dots \cdot \cos(2^{23} \cdot 88^\circ) = \frac{1}{2^{24}}.$$

Rozwiązanie:

Pomnożmy obie strony równania przez $\sin 88^\circ$. Wtedy lewą stronę równania możemy przekształcić w następujący sposób:

$$\sin 88^\circ \cdot \cos 88^\circ \cdot \cos (2 \cdot 88^\circ) \cdot \cos(2^2 \cdot 88^\circ) \cdot \dots \cdot \cos(2^{23} \cdot 88^\circ) = \frac{1}{2^{24}} \sin (2^{24} \cdot 88^\circ).$$

Wystarczy pokazać, że $\sin 88^\circ = \sin(2^{24} \cdot 88^\circ)$. W tym celu pokażemy, że $88 \equiv 2^{24} \cdot 88 \pmod{360}$, a to jest równoważne przystawaniu $11 \equiv 2^{24} \cdot 11 \pmod{45}$. Z tw. Eulera mamy:

$$2^{\varphi(45)} \equiv 1 \pmod{45},$$

$$2^{24} \equiv 1 \pmod{45},$$

$$11 \cdot 2^{24} \equiv 11 \cdot 1 \equiv 11 \pmod{45}.$$

31. Rozstrzygnij, czy szachownicę o wymiarach 4×17 można pokryć tetraminami przedstawionymi na poniższym rysunku (kostki można obracać).



Rozwiązanie:

Przypuśćmy – dążąc do sprzeczności – że takie pokrycie istnieje. Jeśli pokolorujemy pierwszy i trzeci wiersz szachownicy na białe, zaś drugi i czwarty na czarne, to każdy klocek przykrywa 3 pola białe i 1 czarne lub na odwrót – w każdym przypadku nieparzysta liczba białych i nieparzysta liczba czarnych. Liczba wszystkich klocek to 17, zatem pod wszystkimi klockami znajduje się nieparzysta liczba pól białych i nieparzysta liczba czarnych. To jest sprzeczne z tym, że na każdy z kolorów pomalowano dwa pełne wiersze, czyli po 34 pola. Wobec tego takie pokrycie nie istnieje.

Konkurs indywidualny 2

32. Rozwiąż równanie:

$$x + \frac{2026}{x} = [x] + \frac{2026}{[x]}.$$

Rozwiązanie:

Przekształćmy równanie:

$$x + \frac{2026}{x} = [x] + \frac{2026}{[x]}$$

$$x - [x] + \frac{2026}{x} - \frac{2026}{[x]} = 0$$

$$(x - [x]) \left(1 - \frac{2026}{x[x]}\right) = 0$$

$$x = [x] \quad \text{lub} \quad x[x] = 2026$$

Pierwsza równość jest równoważna temu, że liczba x jest całkowita. Druga natomiast ma szansę zachodzić tylko wtedy, gdy $[x] = 45$ lub $[x] = -46$, bo $\sqrt{2026} \in (45, 46)$, a liczby x i $[x]$ różnią się – dla x niecałkowitych – o mniej niż 1. Otrzymujemy stąd jedno dodatkowe niecałkowite rozwiązanie:

$$x = \frac{2026}{45} = 45\frac{1}{45},$$

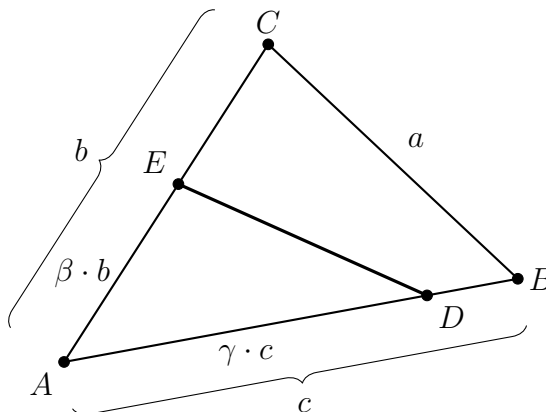
bo po podstawieniu $[x] = -46$ otrzymujemy $x = \frac{2026}{-46} = -44\frac{1}{23}$, ale $\left[-44\frac{1}{23}\right] = -45$ – sprzeczność.

33. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC . Udowodnij, że jeśli $[ADE] = [BCED]$, to

$$\frac{AD + AE}{DB + BC + CE} \geq \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I: Niech $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $AE = \beta \cdot b$, $AD = \gamma \cdot c$, gdzie $\beta, \gamma \in [0, 1]$ mówią o tym, jaką częścią odcinków AC i AB są odpowiednio odcinki AE i AD .



Skoro $[ADE] = [BCED]$, to $[ADE] = \frac{1}{2}[ABC]$, zatem $\frac{1}{2}\beta\gamma c \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}bc \sin(\alpha)$, czyli $\beta\gamma = \frac{1}{2}$. A ponieważ $\beta, \gamma \leq 1$, to $\beta, \gamma \geq \frac{1}{2}$, zatem, co będzie potem ważne, $2\beta - 1 \geq 0$ oraz $2\gamma - 1 \geq 0$. Przekształćmy równoważnie tezę:

$$\frac{\gamma c + \beta b}{(1 - \gamma)c + a + (1 - \beta)b} \geq \frac{1}{3}$$

$$3\gamma c + 3\beta b \geq c - \gamma c + a + b - \beta b$$

$$4\gamma c + 4\beta b \geq a + b + c$$

$$b(4\beta - 1) + c(4\gamma - 1) \geq a$$

Ponieważ $b + c > a$, wystarczy pokazać, że:

$$b(4\beta - 1) + c(4\gamma - 1) \geq b + c$$

$$b(4\beta - 2) + c(4\gamma - 2) \geq 0,$$

a ta nierówność jest prawdziwa, bo $2\beta - 1 \geq 0$ oraz $2\gamma - 1 \geq 0$, co kończy dowód.

Sposób II: Z nierówności trójkąta mamy $BC < AB+AC = AD+DB+AE+EC$. Z równości $[ABE] = [BCED]$ wynikają dwie nierówności: $[ADE] > [DBE]$ oraz $[ADE] > [CDE]$, z których dalej wynikają nierówności

$$AD > DB \quad \text{oraz} \quad AE > CE.$$

Łącząc nierówności mamy:

$$\frac{AD + AE}{DB + BC + CE} > \frac{AD + AE}{DB + CE + AD + DB + AE + CE} > \frac{AD + AE}{3AD + 3AE} = \frac{1}{3}.$$

34. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Liczby całkowite a, b, c, d są takie, że liczby $a + b + c + d$ oraz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dzielą się przez n . Udowodnij, że liczba

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd$$

jest podzielna przez n .

Rozwiązanie:

Niech $w(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Wtedy

$$w(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta,$$

gdzie $\alpha = a + b + c + d$, $\delta = abcd$. Mamy więc

$$\begin{aligned} w(a) &= a^4 - (a + b + c)a^3 + \beta a^2 - \gamma a + \delta, \\ w(b) &= b^4 - (a + b + c)b^3 + \beta b^2 - \gamma b + \delta, \\ w(c) &= c^4 - (a + b + c)c^3 + \beta c^2 - \gamma c + \delta, \\ w(d) &= d^4 - (a + b + c)d^3 + \beta d^2 - \gamma d + \delta. \end{aligned}$$

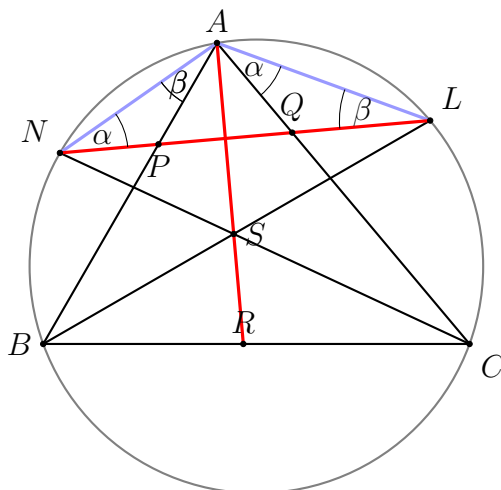
Po dodaniu stronami mamy:

$$\begin{aligned} 0 &= w(a) + w(b) + w(c) + w(d) = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + \\ &\quad + \beta(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \gamma(a + b + c + d) + 4\delta \equiv_n a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd. \end{aligned}$$

35. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Półproste BS i CS przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach L i N . Odcinek NL przecina prostą AB w punkcie P oraz prostą AC w punkcie Q . Wykazać, że czworokąt $APSQ$ jest rombem.

Rozwiązanie:

Niech $\sphericalangle ANL = \alpha = \sphericalangle CAL$ i $\sphericalangle ALN = \beta = \sphericalangle BAN$ (kąty są równe, gdyż punkty N i L są środkami odpowiednich łuków).



Ponieważ $\sphericalangle APQ = \alpha + \beta = \sphericalangle AQP$, to $AP = AQ$. Na mocy dwukrotnie zastosowanego twierdzenia o trójkącie $NA = NS$ oraz $LA = LS$, zatem prosta NL jest symetralną odcinka AS , więc $PA = PS$ i $QA = QS$. Zatem czworokąt $APSQ$ jest rombem, co kończy dowód.

36. Gra 2-osobowa polega na stawianiu pionków w wierzchołkach n -kąta foremnego (zakładamy, że $n \geq 3$). Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz stawia jeden ze swych, dotychczas nieużytych pionków na dowolnym niezajętym wierzchołku, który nie sąsiaduje z wierzchołkiem zajęтым przez pionek przeciwnika. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Rozstrzygnąć, w zależności od n , czy strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik.

Rozwiązanie:

Założmy, że pierwszym graczem jest Ewa, a drugim Jan. Wykażemy, że jeśli liczba n jest parzysta, to strategię wygrywającą ma Jan, a jeśli liczba n jest nieparzysta – Ewa. Zaczniemy od pierwszego przypadku. Jan może zawsze postawić następny pionek na polu symetrycznym względem środka wielokąta do pola, na którym postawiła pionek Ewa. To gwarantuje mu wygraną w oczywisty sposób, niezależnie od poczynań przeciwniczki.

Teraz założmy, że n jest nieparzyste. Ewa stawia gdzieś swój pionek, co powoduje, że Jan nie może korzystać z trzech pól. Wyobraźmy sobie, że gracze przenoszą się na wielokąt, który ma $n - 1$ wierzchołków. Są tam dwa pola sąsiednie zakazane dla Jana, ale nie dla Ewy. Teraz Jan stawia gdzieś swój pionek, a Ewa stawia na polu symetrycznym względem środka $(n - 1)$ -kąta. Może zawsze to uczynić, więc teraz ona wygra (jeśli tylko będzie kontynuować swe postępowanie).

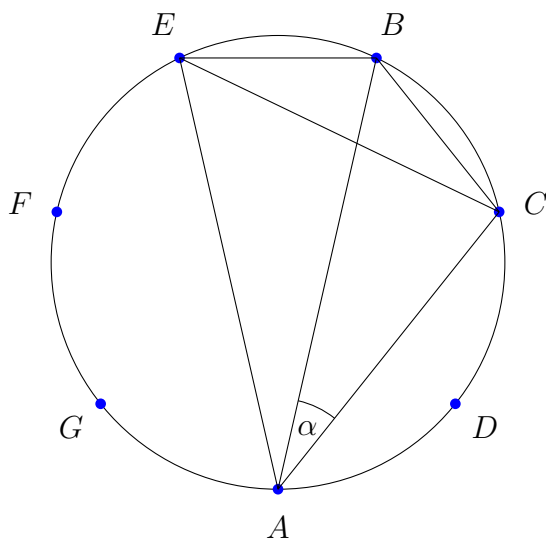
Zadania wieczorne

37. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle ACB = 4 \cdot \sphericalangle BAC$. Udowodnij, że

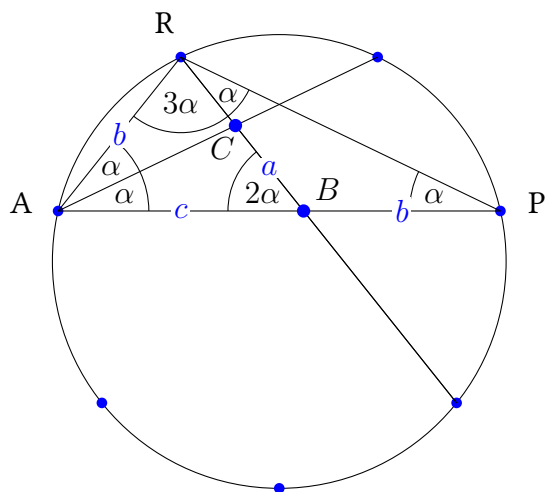
$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I: Niech $\alpha = \sphericalangle BAC$. Kąty $\alpha, 2\alpha, 4\alpha$ zapraszają do tego, by uzupełnić trójkąt ABC do siedmiokąta foremnego $ADCBEFG$ wpisanego w okrąg. Teza łatwo wynika z tw. Ptolemeusza dla czworokąta $ACBE$.



Sposób II: Umieścmy trójkąt ABC wewnątrz większego trójkąta PAR skonstruowanego tak, by był podobny do ABC , a punkty P i R leżały odpowiednio na przedłużeniach odcinków AB oraz BC .

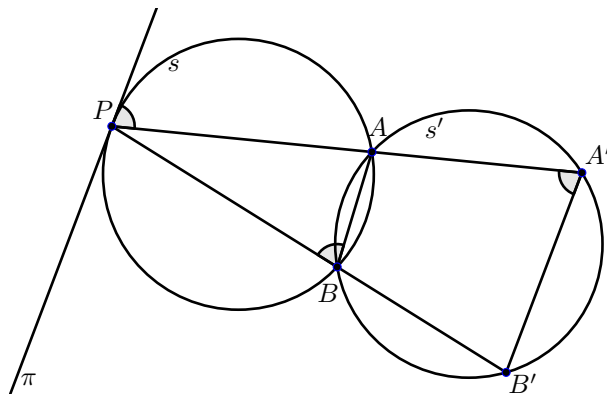


Zauważmy, że $7\alpha = 180^\circ$ i trójkąty ABR oraz PRB są równoramienne. Wobec tego $\frac{a}{c} = \frac{b}{b+c}$, a stąd $\frac{b+c}{bc} = \frac{1}{a}$, czyli $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$, czego należało dowieść.

38. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s i s' . Trzy różne punkty A, B i C leżą na okręgu o . Punkt P leży na sferze s , na zewnątrz sfery s' . Prosta PA przecina sferę s' w punkcie $A' \neq A$; analogicznie określamy punkty B' i C' . Dowieść, że płaszczyzna π , przechodząca przez punkt P i styczna do sfery s , jest równoległa do płaszczyzny $A'B'C'$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że prosta $A'B'$ jest równoległa do płaszczyzny π . W tym celu wystarczy rozważyć przekrój płaszczyzną PAB :



Zaznaczony kąt ostry między prostą PA a prostą wspólną płaszczyzny π i płaszczyzny PAB jest równy kątowi $\sphericalangle PBA$ na mocy twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym. Czworokąt $ABB'A'$ jest wpisany w okrąg (będący częścią wspólną sfery s' i płaszczyzny PAB), zatem $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PA'B'$. To kończy dowód równoległości prostej $A'B'$ do płaszczyzny π . Analogicznie do płaszczyzny π są równoległe proste $B'C'$ oraz $C'A'$, co kończy dowód, że płaszczyzny π oraz $A'B'C'$ są równoległe.

39. Dziewięciocyfrową liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *przyjemną*, jeśli zawiera w swoim zapisie dziesiętnym każdą cyfrę od 1 do 9. Liczbę nazwiemy *cudowną*, jeśli jest przyjemna i dla każdego $k = 1, \dots, 9$ jej k -ta cyfra jest równa pozycji cyfry k w tej liczbie. Na przykład liczba 847296315 jest cudowna:

- pierwsza jej cyfra to 8, co jest także pozycją cyfry 1 w tej liczbie;
- druga jej cyfra to 4, co jest także pozycją cyfry 2 w tej liczbie;
- trzecia jej cyfra to 7, co jest także pozycją cyfry 3 w tej liczbie;
- itd.

Udowodnić, że liczb cudownych jest parzyście wiele.

Rozwiązanie:

Każda permutacja zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ paruje się ze swoją permutacją odwrotną. Liczba przyjemna $c_1 c_2 \dots c_9$ paruje się z liczbą, która ma cyfrę 1 na miejscu c_1 (od lewej), cyfrę 2 na miejscu c_2 itd. Na przykład:

$$576429381 \rightarrow 957413286.$$

Liczba jest cudowna wtedy i tylko wtedy, gdy paruje się sama ze sobą (ma rząd 2 lub 1 w grupie permutacji), więc liczba liczb cudownych przystaje do $9!$ modulo 2, czyli jest parzysta.

40. Danych jest kilka dodatnich liczb: x_1, \dots, x_n . Suma iloczynów $x_i \cdot x_j$ dla $i < j$ wynosi 1. Udowodnij, że można wykreślić jedną liczbę tak, że suma pozostałych liczb jest mniejsza niż $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Niech x_1 będzie największą liczbą spośród x_1, \dots, x_n . Wtedy

$$(x_2 + \dots + x_n)^2 = \sum_{j=2}^n x_j^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j < 2 \sum_{j=2}^n x_1 x_j + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 2.$$

Stąd:

$$x_2 + \dots + x_n < \sqrt{2}.$$

41. Wielomian $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ o współczynnikach rzeczywistych spełnia warunki $P(1) = 0$ oraz $P(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$a_n + 2a_{n-1} + \dots + na_1 + (n+1)a_0 = 0.$$

Rozwiązanie:

Wielomian P ma w punkcie $x = 1$ minimum, więc $P'(1) = 0$. Stąd:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_n &= P(1) = 0, \\ a_1 + 2a_2 + \dots + na_n &= P'(1) = 0. \end{aligned}$$

Mnożąc pierwszą równość przez $(n+1)$ i odejmując drugą dostajemy tezę.

Mecz matematyczny

42. Znajdź największą liczbę rzeczywistą k o następującej własności: dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c takich, że

$$a \leq b \leq c, \quad ab + bc + ca = 0 \quad \text{oraz} \quad abc = 1$$

ma miejsce nierówność

$$|a + b| \geq k \cdot |c|.$$

Rozwiązanie:

Któraś z liczb ab, bc, ca musi być ujemna, a skoro $abc > 0$ i $a \leq b \leq c$, to $a \leq b < 0 < c$.

Wprowadźmy więc dodatnie $x = -a, y = -b$. Z trzeciego założenia $c = \frac{1}{xy}$. Wtedy z drugiego

$x^2y^2 = x + y$ (bo $xy - yc - xc = 0, xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$). Teraz z AM-GM mamy $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$,

czyli $\frac{x^2y^2}{2} \geq \sqrt{xy}$, czyli $x^3y^3 \geq 4$. To wszystko mamy z założeń oraz AM-GM.

Teraz teza:

$$|a + b| \geq kc$$

$$x + y \geq \frac{1}{xy}$$

$$x^2y^2 \geq k \frac{1}{xy}$$

$$x^3y^3 \geq k$$

Powyżej mamy, że $k = 4$ na pewno spełnia nierówność. A czy nie ma większej? Nie, co pokazuje przykład $x = y = \sqrt[3]{2}$.

43. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n równanie:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = 1$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych x_1, x_2, \dots, x_n .

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, że dla $n = 1$ działa $x_1 = 2$, dla $n = 2$ działa $x_1 = 2, x_2 = 3$. W ogólności niech $x_1 = 2, x_{i+1} = x_1 x_2 \dots x_i + 1$ dla $i = 1, 2, 3, \dots, i$ (czyli $x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 43$ etc.). Teraz indukcyjnie, że to rozwiązanie działa dla każdego n .

44. Niech w będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, że $n \mid w(2^n)$ dla wszystkich $n \geq 1$. Wykaż, że w jest wielomianem zerowym.

Rozwiązanie:

Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Wtedy z założenia $pq \mid w(2^{pq})$, więc $w(2^{pq}) \equiv 0 \pmod{p}$. Z drugiej strony z MTF: $2^{pq} \equiv 2^q \pmod{p}$, więc $w(2^{pq}) \equiv w(2^q) \pmod{p}$. Łącząc powyższe $w(2^q) \equiv w(2^{pq}) \equiv 0 \pmod{p}$ dla dowolnych liczb pierwszych p, q , czyli $p \mid w(2^q)$ dla dowolnego p . Zatem $w(2^q) = 0$ i dalej z dowolności q mamy tezę.

45. Każdy bok ośmiokąta foremego jest pomalowany na niebiesko lub żółto. Określamy nowe pokolorowanie w następujący sposób: każdy bok taki, że oba sąsiadujące z nim boki były różnych kolorów, otrzymuje kolor niebieski; każdy bok taki, że oba sąsiadujące z nim boki były jednakowego koloru, otrzymuje kolor żółty (zmiana kolorów jest wykonywana jednocześnie). Wykaż, że wychodząc z dowolnego pokolorowania dostaniemy w skończonej liczbie kroków (tzn. opisanych wyżej zmian kolorów) ośmiokąt, którego wszystkie boki są żółte. Jaka jest maksymalna liczba kroków, która może być do tego niezbędna?

Rozwiązanie:

Numerujemy boki ośmiokąta kolejno liczbami od 1 do 8. Będziemy rozważać ośmiowyrazowe ciągi (a_1, \dots, a_8) o wyrazach $+1$ (bok żółty) lub -1 (bok niebieski). Niech ciąg

$$(a_1(n), \dots, a_8(n))$$

będzie stanem po n zmianach kolorów. Regułę z zadania można zapisać w następujący sposób:

$$a_i(n+1) = a_{i-1}(n) \cdot a_{i+1}(n),$$

przy czym przyjmujemy numerację cykliczną. Stan początkowy oznaczmy przez $a_i(0) = a_i$. Mamy kolejno:

$$a_i(1) = a_{i-1} \cdot a_{i+1}$$

$$a_i(2) = a_{i-1}(1) \cdot a_{i+1}(1) = a_{i-2} a_{i+2} a_i^2 = a_{i-2} a_{i+2}$$

$$a_i(3) = a_{i-1}(2) \cdot a_{i+1}(2) = a_{i-3} a_{i-1} a_{i+1} a_{i+3}$$

$$a_i(4) = a_{i-1}(3) \cdot a_{i+1}(3) = a_{i-4} a_{i-2} a_i a_{i+2} a_{i-2} a_i a_{i+2} a_{i+4} = a_{i-4} a_{i+4} = a_{i+4}^2 = 1$$

Zatem po co najwyżej czterech krokach wszystkie boki będą żółte, niezależnie od stanu początkowego. Nie da się tego polepszyć, gdyż wychodząc od stanu: jeden niebieski, reszta żółte dopiero po czterech krokach otrzymamy wszystkie żółte.

$$NZZZZZZZ \rightarrow ZNZZZZZZ \rightarrow ZZNZZZZN \rightarrow ZNZNZNZN \rightarrow ZZZZZZZZ$$

46. Wykaż, że w czworokącie wypukłym o polu 1 suma długości przekątnych i długości boków jest większa lub równa $4 + 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że boki czworokąta to a, b, c, d oraz przekątne to p, q , które przecinają się pod kątem α . Pole czworokąta to $P = \frac{1}{2}pq \sin \alpha$. Z założenia: $\frac{1}{2}pq \sin \alpha = 1$, więc $pq > pq \sin \alpha = 2$. Zatem $p + q \geq 2\sqrt{pq} \geq 2\sqrt{2}$. Wiemy też, że $P \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd$, więc $ab + cd \geq 2$, podobnie $ad + bc \geq 2$. Wobec tego:

$$a + b + c + d \geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)} = 2\sqrt{ab + ad + bc + cd} \geq 2\sqrt{2+2} = 4.$$

Łącząc powyższe, otrzymujemy:

$$a + b + c + d + p + q \geq 4 + 2\sqrt{2}.$$

47. Udowodnij, że istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych takich, że każda ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60.

Rozwiązanie:

Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że istnieje liczba naturalna $n > 50$, która spełnia układ kongruencji: $n \equiv 0 \pmod{50!}$, $n-1 \equiv 0 \pmod{53}$, $n+1 \equiv 0 \pmod{59}$. Wówczas dla $k = 2, 3, 4, \dots, 50$ liczby $n-k$ oraz $n+k$ dzielą się przez k , a więc każda z nich ma dzielnik pierwszy mniejszy od 60. Ponadto liczba $n-1$ dzieli się przez 53, liczba n dzieli się przez 2, a liczba $n+1$ dzieli się przez 59. Wobec tego liczby $n-49, n-48, \dots, n+50$ spełniają warunki zadania.

48. Niech $a, b, c, d > 0$ spełniają $a + b + c + d = 1$. Wykaż nierówność

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = a$. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{c+d}{4} + \frac{d^2}{d+a} + \frac{d+a}{4} &\geq a + b + c + d, \\ \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} &\geq \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Komentarz: Jak wpaść na to, aby wziąć $\frac{a+b}{4}$? Chcemy jakoś pozbyć się mianowników, więc warto wziąć $\alpha(a+b)$. Wyliczmy teraz, jakie α tu pasuje. Z AM-GM mamy

$$\frac{a^2}{a+b} + \alpha(a+b) \geq 2\sqrt{\alpha a^2} = 2a\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a+b} \geq 2a\sqrt{\alpha} - \alpha(a+b).$$

Analogicznie szacujemy pozostałe nierówności i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} &\geq \\ &\geq 2a\sqrt{\alpha} - \alpha(a+b) + 2b\sqrt{\alpha} - \alpha(b+c) + 2c\sqrt{\alpha} - \alpha(c+d) + 2d\sqrt{\alpha} - \alpha(d+a) = \\ &= 2\sqrt{\alpha}(a+b+c+d) - 2\alpha(a+b+c+d) = 2\sqrt{\alpha} - 2\alpha \end{aligned}$$

Chcemy, by $2\sqrt{\alpha} - 2\alpha = \frac{1}{2}$. A to jest równoważne $4\alpha - 4\sqrt{\alpha} + 1 = 0$, czyli $(2\sqrt{\alpha} - 1)^2 = 0$.
Zatem $\alpha = \frac{1}{4}$.

49. Na bokach AB i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q , że $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie X . Punkt Y jest symetryczny do punktu X względem środka boku BC . Dowieść, że punkt Y leży na dwusiecznej kąta BAC .

Rozwiązanie:

Sposób I.

Zauważmy, że

$$[BPY] = [BXY] = [CXY] = [CQY],$$

więc punkt Y jest równoodległy od prostych AB i AC , co kończy dowód.

Sposób II. Współrzędne barycentryczne

Niech punkt A' będzie odbiciem punktu A względem środka BC . W trójkącie BCA' punkt X ma współrzędne barycentryczne $(AB, AC, -BP)$, więc leży na dwusiecznej.

50. Na konferencję matematyczną przyjechało 17 osób, przy czym każda z osób zna dokładnie cztery inne osoby. Wykazać, że istnieją dwie nieznanym sobie osoby, które nie mają wspólnego znajomego.

Rozwiązanie:

Założmy, że teza nie zachodzi. Wykażemy, że wówczas każda para nieznanym sobie ma dokładnie jednego wspólnego znajomego oraz, że w grafie znajomości nie ma trójkątów.

Niech X oznacza zbiór wszystkich par osób na konferencji, A - zbiór par znajomych, zaś B zbiór par osób, które mają wspólnego znajomego. Teza nie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $X = A \cup B$. Wykażemy, że

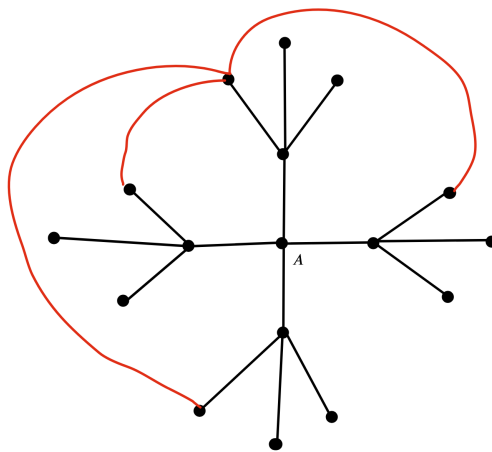
$$A \cap B = \emptyset$$

Zauważmy, że $|A| = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 4 = 34$ oraz $|B| \leq 17 \cdot \binom{4}{2} = 102$ (ta druga liczba oznacza bowiem liczbę "daszków"). Ale

$$|X| \leq |A| + |B| \leq 136 = |X|$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z faktu, że $X = A \cup B$. Stąd $|X| = |A| + |B|$, co wymusza $A \cap B = \emptyset$. W szczególności $|B|$ to liczba "daszków", czyli każda para nieznanym sobie ma dokładnie jednego wspólnego znajomego. Wynika stąd, że w naszym grafie znajomości nie ma trójkątów ani czworokątów ("podwójnych daszków" i nie ma przekątnej).

Zliczmy, ile w naszym grafie jest pięciokątów. W tym celu policzymy ile jest pięciokątów zawierających dany wierzchołek A .



Z rysunku widać, że jest ich dokładnie

$$\frac{3 \cdot 12}{2} = 18.$$

To jest jednak sprzeczność, bo to by oznaczało, że wszystkich pięciokątów w grafie jest

$$\frac{17 \cdot 18}{5}$$

co kończy dowód.

Uwaga. Teza pozostaje prawdziwa dla dowolnego $m \equiv 4 \pmod{5}$ oraz $n = m^2 + 1$, gdzie n to liczba osób, zaś m - liczba osób, którą zna każda inna osoba. Dokładnie ten sam argument przechodzi.

51. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Punkt T spełnia warunek

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC = \sphericalangle ATC.$$

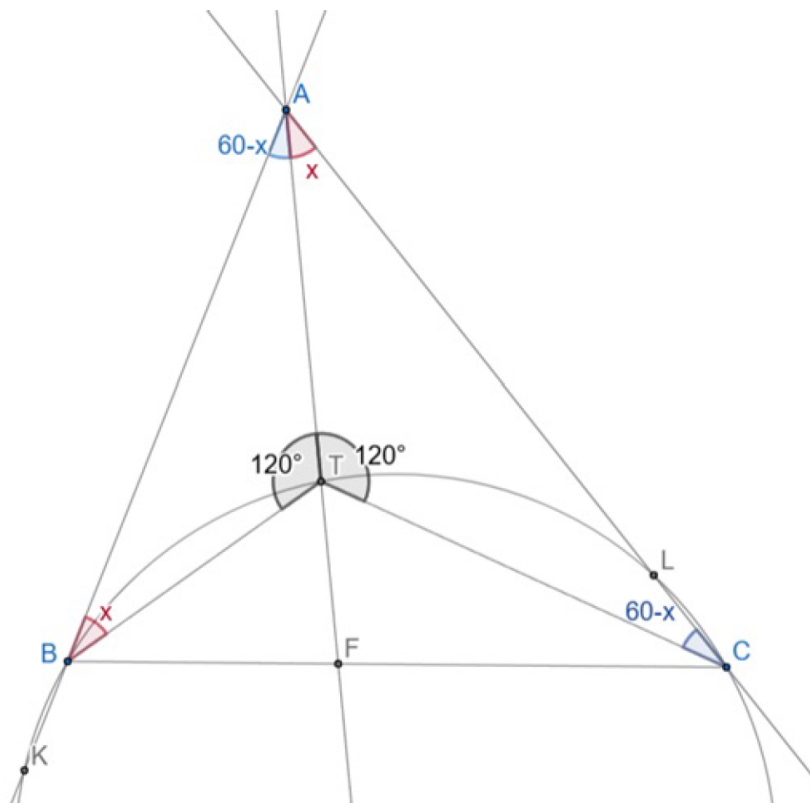
Okrąg opisany na trójkącie BCT przecina proste AB i AC po raz drugi odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że punkty K i L są równoodległe od prostej AT .

Rozwiązanie:

Oznaczmy $\sphericalangle TAC = x$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sphericalangle TCA &= 60 - x = \sphericalangle TAB \\ \sphericalangle TBA &= 60 - (60 - x) = x = \sphericalangle TAC. \end{aligned}$$

Punkt A -Dumpty również spełnia te równości kątów, a ponieważ jest jedynym takim punktem to $T = D_A$, więc T leży na A -symedianie. Ponieważ B, C, K, L leżą na okręgu odcinek KL jest antyrównoległy do BC . Symediana połowi odcinki antyrównoległe, więc połowi KL , więc rzuty K i L na AT są równej długości.



52. Dwie wiewiórki postanowiły zbierać orzechy na zimę. W dniu rozpoczęcia gromadzenia zapasów, które nazwały zgodnie *dniem zero*, miały zupełnie pustą spiżarnię. Pierwszego dnia udało im się znaleźć 2 orzechy. Od następnego dnia z zadziwiającą regularnością codziennie znajdowały 2 razy tyle orzechów, ile miały w swej spiżarni dwa dni wcześniej. Ponadto każdego dnia (od drugiego) w cudowny sposób pojawiały się w spiżarni dodatkowe 4 orzechy... Ułóż równanie rekurencyjne opisujące liczbę orzechów, które wiewiórki posiadają n -tego dnia oraz rozwiąż je dowolną metodą.

Rozwiązanie:

Niech (a_n) będzie ciągiem opisującym liczbę posiadanych orzechów: $a_0 = 0$ (*dzień zero*), $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4$ dla $n \geq 2$.

Zdefiniujmy ciąg pomocniczy (b_n) następująco: $a_n = b_n + c$ dla każdego $n \geq 0$, gdzie c jest pewną stałą. Wówczas:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4 \\ b_n + c &= b_{n-1} + c + 2(b_{n-2} + c) + 4 \\ b_n &= b_{n-1} + 2b_{n-2} + 2c + 4 \end{aligned}$$

Dla ułatwienia obliczeń przyjmijmy $c = -2$ (wtedy $2c + 4 = 0$), stąd:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 + 2 = 2 \\ b_1 = a_1 + 2 = 4 \\ b_n = a_n + 2 = b_{n-1} + 2b_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1} + 2b_{n-2} \\
r^2 &= r + 2 \\
r^2 - r - 2 &= 0 \\
(r - 2)(r + 1) &= 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2
\end{aligned}$$

Zatem $b_n = X \cdot (-1)^n + Y \cdot (2)^n$.

Podstawiając warunki początkowe:

$$\begin{cases} b_0 = X + Y = 2 \\ b_1 = -X + 2Y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 2 \end{cases}$$

Zatem $b_n = 0 + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Wracając do ciągu (a_n) :

$$a_n = b_n - 2 = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1).$$

Zatem: $a_n = 2(2^n - 1), n \geq 0$.

II sposób na rozwiązanie rekurencji:

Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą dla ciągu (a_n) :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4)x^n$$

$$A(x) = 2x + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} + 2a_n + 4)x^n = 2x + x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$A_n = 2x + x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$A(x) = 2x + x \cdot (A(x) - 0) + 2x^2 \cdot A(x) + \frac{4x^2}{1-x}.$$

Czyli:

$$A(x) = A(x) \cdot (x + 2x^2) + 2x + \frac{4x^2}{1-x}$$

$$A(x) \cdot (1 - x - 2x^2) = \frac{2x(1+x)}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{2x(1+x)}{1-x} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$$

$$A(x) = \frac{2x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{2}{1-x} \quad (\text{rozkład na ułamki proste})$$

Zatem:

$$A(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} 1^n x^n,$$

czyli

$$a_n = 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 1^n = 2(2^n - 1).$$